Теория на множествата за гимназисти: домашна работа

06.11.2026

Задача 1. Докажете, че за всички множества A и B, $\overline{\overline{A \times B}} = \overline{\overline{B \times A}}$.

Задача 2. Докажете, че за всички множества A, B и C, $\overline{\overline{(A \times B) \times C}} = \overline{\overline{A \times (B \times C)}}$.

Задача 3. Докажете, че за всички множества A, B и C, ако $B \cap C = \emptyset$, то $\overline{\overline{A^B \times A^C}} = \overline{\overline{A^{B \cup C}}}$.

Задача 4. Нека $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}}$ и $\overline{\overline{B}} < \overline{\overline{C}}$. Докажете, че $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{C}}$.

Задача 5. Нека $a^* \notin A$, $b^* \notin \mathcal{P}(A)$ и $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A \cup \{a^*\}}}$. Докажете, че $\overline{\overline{\mathcal{P}(A)}} = \overline{\overline{\mathcal{P}(A) \cup \{b^*\}}}$.

Задача 6. Нека A е множество, $F \colon \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ и F е монотонно растяща, т.е. за всяко $X \subseteq A$ и $Y \subseteq A$

$$X \subseteq Y \to F(X) \subseteq F(Y)$$

Тогава съществува *най-малка* (по отношение на $\subseteq$) неподвижна точка на F, т.е.

$$(\exists M \in \mathcal{P}(A))(F(M) = M \,\&\, (\forall N \in \mathcal{P}(A))(F(N) = N \to M \subseteq N))$$

Упътване: конструкцията е много подобна на тази, показана в час. Достатъчно е да се променят само няколко знака.